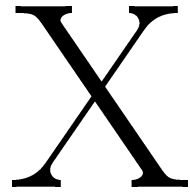




Enseignants: Dovi, Huruguen, Maatouk
Géométrie analytique - CMS
9 janvier 2023
Durée : 105 minutes



Contrôle 2 (Corrigé)

SCIPER: XXXXXX

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 7 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

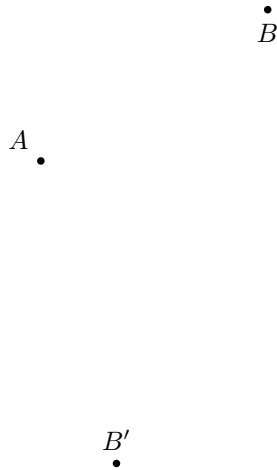


Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Enoncé

On donne les quatre points représentés ci-dessous dans le plan ((AA') et (BB') sont parallèles).



Question 1 (2 points) Une transformation f envoie A à B' et A' à B . Laquelle des propositions suivantes est vraie?

- ☐ f peut être une homothétie de rapport α tel que $-1 < \alpha < 0$
- ☐ f ne peut être ni une rotation ni une homothétie
- ☒ f peut être une homothétie dont le centre est l'intersection de ($A'B$) et (AB')
- ☐ f peut être une rotation dont le centre est l'intersection de ($A'B$) et (AB')

Question 2 (2 points) Une transformation f envoie A à B et A' à B' . Laquelle des propositions suivantes est vraie?

- ☐ f peut être une rotation d'angle aigu
- ☒ f peut être une homothétie de rapport α tel que $\alpha > 1$
- ☐ f peut être une rotation d'angle obtus
- ☐ f peut être une homothétie de rapport α tel que $0 < \alpha < 1$

Question 3 (2 points) Une transformation f envoie A à A' et B à B' . Laquelle des propositions suivantes est vraie?

- ☐ f peut être uniquement une symétrie
- ☐ f peut être uniquement une projection
- ☒ f peut être une projection ou une symétrie
- ☐ f peut être une projection, une symétrie ou une rotation



Enoncé

On munit l'espace d'un repère orthonormé.

Soient la droite d et le plan π suivants :

$$d : \quad 1 - x = z + 2, \quad y = 3 \qquad \pi : \quad 2x - y + 3z = 4$$

Question 4 (1 point) Quelle est l'intersection $d \cap Oxy$?

- ☐ $(1, 0, -2)$
- ☒ $(-1, 3, 0)$
- ☐ l'ensemble vide
- ☐ $(1, 3, -2)$

Question 5 (1 point) Quelle est l'intersection $d \cap Oxz$?

- ☐ $(1, 3, -2)$
- ☐ $(1, 0, -2)$
- ☒ l'ensemble vide
- ☐ $(-1, 3, 0)$

Question 6 (1 point) Quel est le cosinus de l'angle géométrique entre le plan Oyz et le plan π ?

- ☒ $\frac{2}{\sqrt{14}}$
- ☐ $\frac{2}{14}$
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{14}}$
- ☐ $\frac{1}{14}$



Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐	.5	☐	.5	☐	.5	☐	.5	☐	.5	☐	.5	☐	.5	☐	.5
☒ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7								

Dans le plan, on donne les quatre points A, B, C, M représentés ci-dessous.

- (a) En faisant apparaître votre construction, placer sur la figure le point :

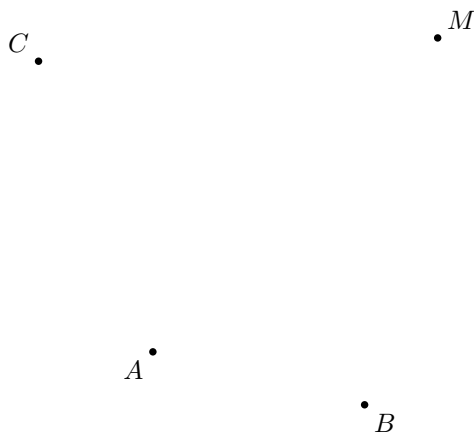
$$D = t_{2\overrightarrow{AB}}(C).$$

- (b) Soit f la transformation géométrique d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = -2x + 6 \\ y' = -2y + 3 \end{cases}$$

dans le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

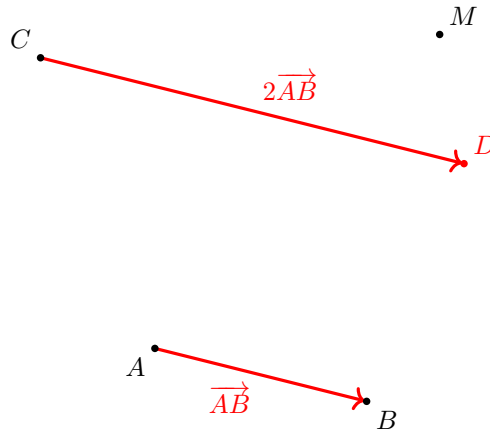
- (c) En faisant apparaître votre construction, placer le point $M' = f(M)$ sur le dessin.
 (d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation géométrique $g = h_{A, \frac{1}{5}} \circ h_{C, 5}$.





Solution

- (a) Par définition d'une translation, on a donc $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$. Cela conduit à la construction suivante :



- (b) On reconnaît des formules pour une homothétie de rapport -2 . On trouve le centre en recherchant l'unique point fixe :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6 = x \\ -2y + 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

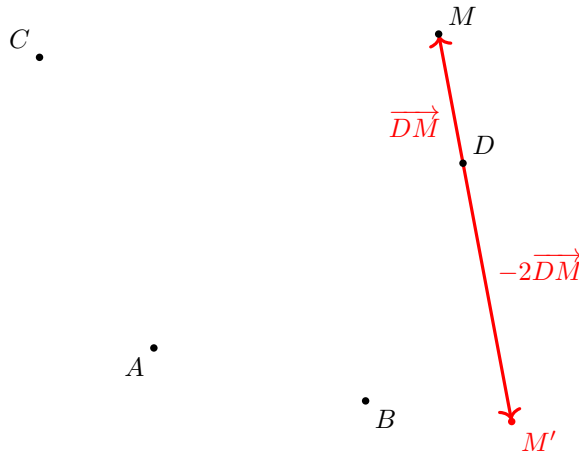
La transformation f est donc l'homothétie de rapport -2 centrée au point de coordonnées $(2, 1)$.

- (c) Le centre de f n'est autre que le point D défini au (a). En effet, ce point vérifie :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

et a donc bien pour coordonnées $(2, 1)$ dans le repère $\mathcal{R}$. Pour placer le point M' sur la figure on utilise alors l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{DM'} = -2\overrightarrow{DM}.$$



- (d) Comme $\frac{1}{5} \times 5 = 1$, on sait que la composée :

$$g = h_{A, \frac{1}{5}} \circ h_{C, 5}$$

est une translation. Pour en trouver le vecteur $\overrightarrow{u}$, cherchons par exemple l'image C' de C :

$$C' = g(C) = h_{A, \frac{1}{5}}(h_{C, 5}(C)) = h_{A, \frac{1}{5}}(C).$$

On a donc :

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

si bien que :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CA}.$$



Question 8: Cette question est notée sur 7 points.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on donne les points $A(5, -3)$ et $B(6, 2)$.

- (a) Une projection p dont les axes passent par l'origine envoie A sur B . Donner son expression analytique.
- (b) Une rotation centrée en A envoie B sur un point B' appartenant à la droite ℓ d'équation $\ell: y = x/2$. Sachant que les coordonnées de B sont des nombres entiers, donner l'expression analytique de la rotation.

Solution

- (a) Soient d et g les axes (passant par l'origine) tels que p est la projection sur d parallèlement à g . Alors d'une part B appartient à d et donc d a pour équation $y = x/3$. Et d'autre part $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ dirige g , qui a donc pour équation $5x - y = 0$. La matrice de projection correspondante est donc

$$P = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (5 \ -1) = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

et p a pour expression analytique

$$\begin{cases} x' &= \frac{15}{14}x - \frac{3}{14}y \\ y' &= \frac{5}{14}x - \frac{1}{14}y \end{cases}.$$

- (b) Le point B' de coordonnées (x, y) satisfait $\|\overrightarrow{AB'}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{26}$ (repère orthonormé). On a donc, en substituant $y = x/2$ puisque $B' \in \ell$,

$$(x - 5)^2 + (x/2 + 3)^2 = 26 \iff \frac{5}{4}x^2 - 7x + 8 = 0.$$

Cette équation a deux solutions, $x = 4$ correspondant au point de coordonnées $(4, 2)$ et $x = 8/5$ correspondant au point de coordonnées $(8/5, 4/5)$. Comme on sait que le point B' est de coordonnées entières, on obtient donc $B'(4, 2)$.

L'angle θ de la rotation est donc l'angle de $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ vers $\overrightarrow{AB'} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. On obtient

$$\cos(\theta) = \frac{-1 + 25}{\sqrt{26} \times \sqrt{26}} = \frac{12}{13} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{5 + 5}{\sqrt{26} \times \sqrt{26}} = \frac{5}{13}.$$

La matrice de rotation correspondante est $R_\theta = \begin{pmatrix} 12/13 & -5/13 \\ 5/13 & 12/13 \end{pmatrix}$ et l'expression analytique de la rotation est donc

$$r : \begin{cases} x' &= \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{10}{13} \\ y' &= \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{28}{13} \end{cases},$$

où le terme constant a été obtenu en calculant $(I_2 - R_\theta) \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.



Question 9: Cette question est notée sur 7 points.

	.		.		.		.		.		.		.		.		.		.	
	0		1		2		3		4		5		6		7					

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois droites suivantes :

$$d : x = \frac{1-y}{2} = \frac{5-z}{3} \quad g : \frac{x-5}{2} = y-1 = -z \quad l : \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1-t \\ z = 3-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- Vérifier que les droites d et g sont concourantes et déterminer les coordonnées du point de concours P .
- Déterminer une équation cartésienne du plan π défini par les droites d et g .
- Déterminer les équations cartésiennes d'une droite a qui est incluse dans le plan π , qui coupe l et qui passe par P .

Solution

- Réolvons le système suivant pour voir s'il existe un point de concours, après avoir mis d sous forme paramétrique:

$$d : \begin{cases} x = k \\ y = 1 - 2k \\ z = 5 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

$$d \cap g : \frac{k-5}{2} = 1 - 2k - 1 = -5 + 3k$$

En prenant la première égalité, on trouve $k-5 = -4k$ et donc $k = 1$ et en prenant la deuxième égalité on trouve $-2k = -5 + 3k$ et donc aussi $k = 1$.

Le point de concours est $P(1, -1, 2)$.

- L'équation du plan π est la suivante :

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ y+1 & 2 & 1 \\ z-2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-5x + 5 + 5y + 5 - 5z + 10 = 0$$

$$\pi : x - y + z = 4$$

- Pour être incluse dans π , la droite a doit couper la droite l au point I tel que $I = a \cap \pi$.

Cherchons I :

$$l \cap \pi : 3 + t - (-1 - t) + 3 - t = 4$$

$$7 + t = 4$$

$$t = -3$$

Et donc $I(0, 2, 6)$

La droite cherchée est la droite $d(P, PI)$

$$\vec{PI} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ Les équations cartésiennes de la droite } a \text{ sont donc :}$$

$$a : 1 - x = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$$